Универзитет у Крагујевцу
Факултет техничких наука у Чачку
Основне академске студије
30.06.2023

Пријемни испит из

МАТЕМАТИКЕ

1. Израчунати вредност израза:

$$A = \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + (ab)^{\frac{1}{2}} \right) : \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a - b} \right)^{-2},$$

за $a = 27$ и $b = 8$.

2. Одредити параметар k тако да права $y = x + 1$ буде тангента параболе $y = kx^2 + kx + \frac{1}{4k}(5k + 5)$.

3. Решити једначину:

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2.$$

4. Решити једначину:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}.$$

5. Одредити угао под којим се секу праве $p : x\sqrt{3} - y + 4 = 0$ и $\ell : x\sqrt{3} + y - 4 = 0$.

6. Три броја чији је збир 93 чине геометријски низ. Исти бројеви се могу узети за први, други и седми члан аритметичког низа. Наћи те бројеве.

Универзитет у Крагујевцу

Факултет техничких наука у Чачку

Основне академске студије

30.06.2023

Пријемни испит из

МАТЕМАТИКЕ

1. Израчунати вредност израза:

$$A=\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+(ab)^{\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^{-2},$$

за $a=27$ и $b=8$.

Решење:

$$\begin{aligned}
A&=\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+(ab)^{\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^{-2}\\
&=\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{2}\\
&=\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)^{2}\\
&=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a-b)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\\
&=\frac{a-b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a-b}{a-b}=1.
\end{aligned}$$

2. Одредити m тако да права $y=x+1$ буде тангента параболе $y=kx^2+kx+\frac{1}{4k}(5k+5)$.

Решење: Како је права $y=x+1$ тангента параболе $y=kx^2+kx+\frac{1}{4k}(5k+5)$, то важи

$$x+1=kx^2+kx+\frac{1}{4k}(5k+5),$$

односно
$$kx^2 + (k-1)\,x + \frac{1}{4k}\,(5k+5) - 1 = 0.$$
Вредност дискриминанте D дате квадратне једначине мора бити једнака нули, стога важи
$$D = (k-1)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4k}\,(5k+5) + 4k = 0,$$
односно
$$k^2 - 3k - 4 = 0.$$
Решавањем ове квадратне једначине добијамо да је $k_1 = 4$ и $k_2 = -1$.

3. Решити једначину:
$$\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2.$$

Решење: Посматрана једначина има смисла за све реалне вредности x за које је $4^x - 6 > 0$ и $2^x - 2 > 0$. Користећи особине логаритма, важи
$$\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{4^x - 6}{2^x - 2}\right) = 2,$$
одакле добијамо да је
$$\frac{4^x - 6}{2^x - 2} = 5.$$
Уводећи смену $t = 2^x$, $t > 0$, долазимо до рационалне једначине
$$\frac{t^2 - 6}{t - 2} = 5,$$
односно
$$\frac{t^2 - 5t + 4}{t - 2} = 0,$$
одакле је $t^2 - 5t + 4 = 0$ и $t - 2 \neq 0$. Квадратна једнавчина $t^2 - 5t + 4 = 0$ има два решења $t_1 = 1$ или $t_2 = 4$. Враћајући смену добијамо да је $2^x = 1$ или $2^x = 4$, па је $x = 0$ или $x = 2$. Како $x = 0$ не задовољава почетне услове $4^x - 6 > 0$ и $2^x - 2 > 0$, а $x = 2$ их задовољава, то можемо закључити да је $x = 2$ решење полазне једначине.

4. Решити једначину:
$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}.$$

Решење: Користећи основни тригонометријски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, добијамо
$$\left(1 - \cos^2 x\right)^2 - \cos^4 x = \frac{1}{2},$$
односно
$$1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}.$$

Након сређивања добијамо да је

$$\cos^2 x = \frac{1}{4},$$

односно

$$\cos x = \pm\frac{1}{2}.$$

Коначно добијамо да је $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$.

5. Одредити угао под којим се секу праве $p : x\sqrt{3}-y+4 = 0$ и $\ell : x\sqrt{3}+y-4 = 0$.

Решење: Једначине правих можемо представити у облику

$$p : y = x\sqrt{3} + 4 \quad \text{и} \quad \ell : y = -x\sqrt{3} + 4.$$

Одавде добијамо њихове коефицијенте правца

$$k_p = \sqrt{3} \quad \text{и} \quad k_\ell = -\sqrt{3}.$$

Заменом коефицијената праваца у једнакост

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_p - k_\ell}{1 + k_p k_\ell}\right|,$$

следи

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}.$$

Дакле, праве се секу под углом

$$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

6. Три броја чији је збир 93 чине геометријски низ. Исти бројеви се могу узети за први, други и седми члан аритметичког низа. Наћи те бројеве.

Решење: Нека су a_1, a_2 и a_3 три броја који чине геометријски низ, тј. $a_2 = a_1 q$ и $a_3 = a_1 q^2$ и важи $a_1 + a_2 + a_3 = 93$. Услов задатка је да они могу бити први, други и седми члан аритметичког низа, а разлика узастопних чланова аритметичког низа је константна, па важи да је разлика седмог и другог члана пет пута већа од разлике првог и другог. Важи да је

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 = 93 &\quad \text{и} \quad 5(a_2 - a_1) = a_3 - a_2,\\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 93 &\quad \text{и} \quad 5(a_1 q - a_1) = a_1 q^2 - a_1 q,\\ a_1(1 + q + q^2) = 93 &\quad \text{и} \quad 5a_1(q-1) = a_1 q(q-1). \end{aligned}$$

Другу једначину можемо поделити са a_1 (a_1 не може бити нула зато што би у том случају сва три члана били нула па њихов збир не би био 93), па добијамо

$$5(q-1) = q(q-1).$$

У случају да је $q-1=0$, добијамо $q=1$ и то решење враћамо у прву једначину $a_1(1+q+q^2)=93$, одакле је

$$a_1 = \frac{93}{3} = 31.$$

Тражени бројеву су 31, 31 и 31.

У случају да је $q-1 \neq 0$, једначину $5(q-1) = q(q-1)$ можемо поделити са $q-1$, одакле је $q=5$ и то решење враћамо у прву једначину $a_1(1+q+q^2)=93$. Коначно имамо

$$a_1 = \frac{93}{1+5+5^2} = \frac{93}{31} = 3.$$

Тражени бројеву су 3, $3 \cdot 5$ и $3 \cdot 5^2$, односно 3, 15 и 75.